अध्याय 12

त्रिविमीय ज्यामिति का परिचय

Introduction to Three Dimensional Geometry

प्रश्नावली 12.1

प्रश्न 1. **एक बिंदु x-अक्ष पर स्थित है। इसके y-निर्देशांक तथा z-निर्देशांक क्या हैं?**

हल किसी बिंदु के x-अक्ष पर निर्देशांक $(x, 0, 0)$ होते हैं। (क्योंकि x-अक्ष पर y तथा z के निर्देशांक शून्य होते हैं) अतः इसके y तथा z-निर्देशांक 0 है।

प्रश्न 2. **एक बिंदु XZ-तल में है। इसके y-निर्देशांक के बारे में आप क्या कह सकते हैं?**

हल किसी बिंदु के XZ-तल पर निर्देशांक $(x, 0, z)$ होंगे, तब इसका y-निर्देशांक 0 है।

प्रश्न 3. उन अष्टांशों के नाम बताइए, जिनमें निम्नलिखित बिंदु स्थित हैं।

$(1, 2, 3), (4, -2, 3), (4, -2, -5), (4, 2, -5), (-4, 2, -5)$,

$(-4, 2, 5), (-3, -1, 6)$ $(2, -4, -7)$

हल

बिंदु	अष्टक	नाम
$(1, 2, 3)$	प्रथम (सभी निर्देशांक धनात्मक हैं)	$XOYZ$
$(4, -2, 3)$	चतुर्थ (y- निर्देशांक ऋणात्मक है)	$XOY'Z$
$(4, -2, -5)$	अष्टम् (y- तथा z-निर्देशांक ऋणात्मक हैं)	$XOY'Z'$
$(4, 2, -5)$	पंचम् (z-निर्देशांक ऋणात्मक है)	$XOYZ'$
$(-4, 2, -5)$	षष्टम् (x तथा z-निर्देशांक ऋणात्मक हैं)	$X'OYZ'$
$(-4, 2, 5)$	द्वितीय (x-निर्देशांक ऋणात्मक हैं)	$X'OYZ$
$(-3, -1, 6)$	तृतीय (x तथा y-निर्देशांक ऋणात्मक हैं)	$X'OY'Z$
$(2, -4, -7)$	अष्टम् (y तथा z-निर्देशांक ऋणात्मक हैं)	$XOY'Z'$

प्रश्न 4. रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए

(i) z-अक्ष और y-अक्ष दोनों एकसाथ मिलकर एक तल बनाते हैं, उस तल को .... कहते हैं।

(ii) XY-तल में एक बिंदु के निर्देशांक .... रूप के होते हैं।

(iii) निर्देशांक तल अंतरिक्ष को .... अष्टांश में विभाजित करते हैं।

हल (i) XY-तल (ii) $(x, y, 0)$ (iii) अष्टक

प्रश्नावली 12.2

प्रश्न 1. निम्नलिखित बिंदु-युग्मों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए

(i) $(2, 3, 5)$ और $(4, 3, 1)$ (ii) $(-3, 7, 2)$ और $(2, 4, -1)$

(iii) $(-1, 3, -4)$ और $(1, -3, 4)$ (iv) $(2, -1, 3)$ और $(-2, 1, 3)$

दो बिंदुओं (x_1, y_1, z_1) तथा (x_2, y_2, z_2) के बीच की दूरी

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

हल (i) माना दिए गए बिंदु $A(2, 3, 5)$ और $B(4, 3, 1)$ हैं।

$\therefore$ $x_1 = 2,\ y_1 = 3,\ z_1 = 5$

$x_2 = 4,\ y_2 = 3,\ z_2 = 1$

$\therefore$ अभीष्ट दूरी, $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

$\Rightarrow$ $AB = \sqrt{(4-2)^2 + (3-3)^2 + (1-5)^2}$

$= \sqrt{4 + 0 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

(ii) माना दिए गए बिंदु $A(-3, 7, 2)$ तथा $B(2, 4, -1)$ हैं।

यहाँ, $x_1 = -3,\ y_1 = 7,\ z_1 = 2$

$x_2 = 2,\ y_2 = 4,\ z_2 = -1$

$\therefore$ अभीष्ट दूरी, $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

$= \sqrt{[2-(-3)]^2 + (4-7)^2 + (-1-2)^2}$

$= \sqrt{(2+3)^2 + (4-7)^2 + (-1-2)^2}$

$= \sqrt{25 + 9 + 9} = \sqrt{43}$

(iii) माना दिए गए बिंदु $A(-1, 3, -4)$ तथा $B(1, -3, 4)$ हैं।

$\therefore$ अभीष्ट दूरी, $AB = \sqrt{(1+1)^2 + (-3-3)^2 + (4+4)^2}$

$= \sqrt{4 + 36 + 64} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$

(iv) माना दिए गए बिंदु $A(2, -1, 3)$ तथा $B(-2, 1, 3)$ हैं।

$\therefore$ अभीष्ट दूरी, $AB = \sqrt{(-2-2)^2 + (1+1)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{4^2 + 2^2 + 0}$

$= \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

प्रश्न 2. दर्शाइए कि बिंदु $(-2, 3, 5)$, $(1, 2, 3)$ और $(7, 0, -1)$ संरेख हैं।

तीन बिंदु A, B, C संरेखीय कहलाएँगें, यदि $AB + BC = AC$

$$A \longleftarrow B \longrightarrow C$$

हल माना दिए गए बिंदु $A(-2, 3, 5)$; $B(1, 2, 3)$; $C(7, 0, -1)$ हैं।

A तथा B के बीच की दूरी, $AB = \sqrt{(-2-1)^2 + (3-2)^2 + (5-3)^2}$

$= \sqrt{(-3)^2 + (1)^2 + (2)^2} = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14}$

B तथा C के बीच की दूरी, $BC = \sqrt{(1-7)^2 + (2-0)^2 + (3+1)^2}$

$= \sqrt{(-6)^2 + (2)^2 + (4)^2}$

$= \sqrt{36 + 4 + 16} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$

तथा A और C के बीच की दूरी, $AC = \sqrt{(-2-7)^2 + (3-0)^2 + (5+1)^2}$

$= \sqrt{(-9)^2 + (3)^2 + (6)^2}$

$= \sqrt{81 + 9 + 36} = \sqrt{126} = 3\sqrt{14}$

स्पष्ट है, $AB + BC = AC$

अत: दिए गए बिंदु संरेखीय हैं।

प्रश्न 3. निम्नलिखित को सत्यापित कीजिए

(i) (0, 7, – 10), (1, 6, – 6) और (4, 9, – 6) एक समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं।

(ii) (0, 7, 10), (– 1, 6, 6) और (– 4, 9, 6) एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं।

(iii) (– 1, 2, 1), (1, – 2, 5), (4, – 7, 8) और (2, – 3, 4) एक समांतर चतुर्भुज के शीर्ष हैं।

एक त्रिभुज समद्विबाहु होता है यदि इसकी कोई दो भुजाएँ बराबर होती हैं।

अतः त्रिभुज को समहिबाहु सिद्ध करने के लिए हमें सिद्ध करना होता है कि इसकी दो भुजाओं की लम्बाई बराबर है।

एक त्रिभुज को समकोण त्रिभुज सिद्ध करने के लिए हमें सिद्ध करना होता है कि त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं के वर्गों का योग तीसरी भुजा के वर्ग के बराबर होता है।

समांतर चतुर्भुज सिद्ध करने के लिए, हमे सिद्ध करना होता है कि इसके विकर्ण आपस में समद्विभाजित करते हैं।

हल (i) माना $A(0, 7, -10)$, $B(1, 6, -6)$ तथा C $(4, 9, -6)$ त्रिभुज के शीर्ष हैं। तब,

भुजा, $AB = A$ तथा B बिंदुओं के बीच की दूरी

$$= \sqrt{(0-1)^2 + (7-6)^2 + (-10+6)^2}$$

$$= \sqrt{1+1+16} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

तथा भुजा, $BC = B$ तथा C बिंदुओं के बीच की दूरी

$$= \sqrt{(1-4)^2 + (6-9)^2 + (-6+6)^2}$$

$$= \sqrt{9+9+0}$$

$$= \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

स्पष्टतः $AB = BC$

अतः त्रिभुज एक समाद्विबाहु त्रिभुज है।

(ii) माना A $(0, 7, 10)$, B $(-1, 6, 6)$ तथा $C(-4, 9, 6)$ त्रिभुज के शीर्ष है।

तब, $$AB = \sqrt{(0+1)^2 + (7-6)^2 + (10-6)^2}$$

$\Rightarrow$ $$AB = \sqrt{1+1+16} = \sqrt{18}$$

$$= 3\sqrt{2}$$

तब $$BC = \sqrt{(-1+4)^2 + (6-9)^2 + (6-6)^2}$$

$\Rightarrow$ $$BC = \sqrt{9+9+0} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

तथा $$CA = \sqrt{(-4-0)^2 + (9-7)^2 + (6-10)^2}$$

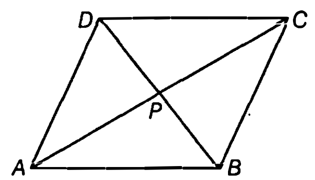
$\Rightarrow$ $$CA = \sqrt{16+4+16}$$

$$= \sqrt{36} = 6$$

अब, $AB^2 + BC^2 = (3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2 = 6^2 = CA^2$

$\therefore$ ΔABC, B पर एक समकोण त्रिभुज है।

(iii) माना $A(-1, 2, 1)$, $B(1, -2, 5)$, $C(4, -7, 8)$ तथा $D(2, -3, 4)$ समांतर चतुर्भुज के शीर्ष हैं।



तब, AC का मध्य-बिंदु $= \left(\frac{1+4}{2}, \frac{2-7}{2}, \frac{1+8}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right)$

BD का मध्य-बिंदु $= \left(\frac{1+2}{2}, \frac{-2-3}{2}, \frac{5+4}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{-5}{2}, \frac{9}{2}\right)$

दोनों विकर्णों के मध्य-बिंदु समान हैं (अर्थात् ये एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

अतः $ABCD$ एक समांतर चतुर्भुज है।

प्रश्न 4. ऐसे बिंदुओं के समुच्चय का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिंदु (1, 2, 3) और (3, 2, – 1) से समदूरस्थ हैं।

यदि तल में कोई बिंदु इस प्रकार है कि दिए हुए दो बिंदुओं से समान दूरी पर है, तब हम दो बिंदुओं के समदूरस्थ होने के लिए निम्न संबंध प्रयोग कर सकते हैं

$$AP = BP$$

हल माना A तथा B दो दिए गए बिंदु है। माना $P(x, y, z)$ एक ऐसा बिंदु है जो A तथा B से समदूरस्थ है।

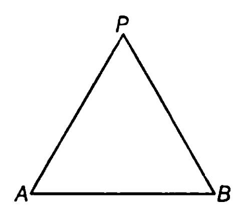
$\therefore \quad PA = PB$ अर्थात्

P तथा A के बीच की दूरी $= P$ तथा B के बीच की दूरी

$\Rightarrow \quad \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2}$

$\Rightarrow \quad (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2$

$\qquad = (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2$



$\Rightarrow \quad x^2 + 1 - 2x + y^2 + 4 - 4y + z^2 + 9 - 6z$

$\qquad = x^2 + 9 - 6x + y^2 + 4 - 4y + z^2 + 1 + 2z$

$\Rightarrow \quad 4x - 8z = 0 \quad \Rightarrow \quad x - 2z = 0$

जोकि आवश्यक प्रतिबंध है।

प्रश्न 5. बिंदुओं P से बने समुच्चय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिनकी बिंदुओं $A(4, 0, 0)$ और $B(-4, 0, 0)$ से दूरियों का योगफल 10 है।

हल माना बिंदु $P(x, y, z)$ है, तब दिया है कि $PA + PB = 10$

$\Rightarrow \quad \sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} + \sqrt{(x+4)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = 10$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{(x-4)^2+y^2+z^2} = 10 - \sqrt{(x+4)^2+y^2+z^2}$$

दोनों ओर वर्ग करने पर,

$$(x-4)^2+y^2+z^2 = 100+(x+4)^2+y^2+z^2-20\sqrt{(x+4)^2+y^2+z^2}$$

$$\Rightarrow \quad x^2+16-8x = 100+x^2+16+8x-20\sqrt{(x+4)^2+y^2+z^2}$$

$$\Rightarrow \quad -8x-8x-100 = -20\sqrt{(x+4)^2+y^2+z^2}$$

$$\Rightarrow \quad -16x-100 = -20\sqrt{(x+4)^2+y^2+z^2}$$

$$\Rightarrow \quad 4x+25 = 5\sqrt{(x+4)^2+y^2+z^2}$$ (दोनों पक्षों में 4 से भाग देने पर)

पुनः दोनों पक्षों में वर्ग करने पर,

$$(4x+25)^2 = 25\,[(x+4)^2+y^2+z^2]$$

$$\Rightarrow \quad 16x^2+625+200x = 25\,[(x+4)^2+y^2+z^2]$$

$$\Rightarrow \quad 16x^2+625+200x = 25\,[x^2+16+8x+y^2+z^2]$$

$$\Rightarrow \quad 16x^2+625+200x = 25x^2+400+200x+25y^2+25z^2$$

$$\Rightarrow \quad 9x^2+25y^2+25z^2-225 = 0$$

जोकि अभीष्ट समीकरण है।

प्रश्नावली 12.3

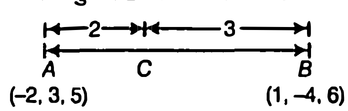
प्रश्न 1. बिंदुओं $(-2, 3, 5)$ और $(1, -4, 6)$ को मिलाने से बने रेखाखंड को अनुपात

(i) $2:3$ में अंतः

(ii) $2:3$ में बाह्यतः विभाजित करने वाले बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल दिए गए बिंदु $A(-2, 3, 5)$ तथा $B(1, -4, 6)$ हैं।

(i) माना बिंदु C रेखा को अनुपात $2:3$ में अंतः विभाजित करता है।



यहाँ अनुपात है $2:3$

$\therefore \quad m = 2$ तथा $n = 3$

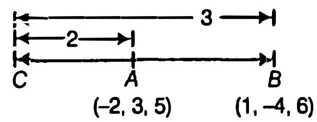
$$C \text{ के निर्देशांक} = \left[\left(\frac{m_1 x_2 + nx_1}{m+n}\right), \left(\frac{m_1 y_2 + ny_1}{m+n}\right), \left(\frac{m_1 z_2 + nz_1}{m+n}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \quad C = \left(\frac{2\times(+1)+3\times(-2)}{(2+3)}, \frac{2\times(-4)+3\times 3}{(2+3)}, \frac{2\times 6+3\times 5}{(2+3)}\right)$$

$$= \left(\frac{2-6}{5}, \frac{-8+9}{5}, \frac{12+15}{5}\right)$$

$$= \left(-\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{27}{5}\right)$$

(ii) माना बिंदु C रेखा को अनुपात $2:3$ में बाह्य विभाजित करता है



यहाँ अनुपात $2:3$ है।

$\therefore \quad m = 2, n = 3$

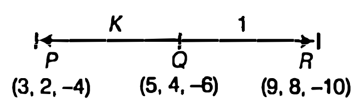
C के निर्देशांक $= \left[\left(\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}\right), \left(\frac{my_2 - ny_1}{m-n}\right), \left(\frac{mz_2 - nz_1}{m-n}\right)\right]$

$$\Rightarrow \; C = \left(\frac{2\times(1) - 3\times(-2)}{(2-3)}, \frac{2\times(-4) - 3\times 3}{(2-3)}, \frac{2\times 6 - 3\times 5}{(2-3)}\right)$$

$$= \left(\frac{2+6}{(-1)}, \frac{-8-9}{(-1)}, \frac{12-15}{(-1)}\right) = (-8, 17, 3)$$

प्रश्न 2. **दिया गए है कि बिंदु $P(3, 2, -4)$, $Q(5, 4, -6)$ और $R(9, 8, -10)$ संरेख हैं। वह अनुपात ज्ञात कीजिए जिसमें Q, PR को विभाजित करता है।**

हल माना Q, PR को अनुपात $K:1$ में विभक्त करता है।



यहाँ बिंदु Q, रेखा PR को अंतः विभाजित करता है, अतः इसके निर्देशांक हैं।

$$\left[\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}\right), \left(\frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right), \left(\frac{mz_2 + nz_1}{m+n}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \qquad Q = \left(\frac{K\times 9 + 1\times 3}{K+1}, \frac{K\times 8 + 1\times 2}{K+1}, \frac{K(-10) + 1\times(-4)}{K+1}\right)$$

$$= \left(\frac{9K+3}{K+1}, \frac{8K+2}{K+1}, \frac{-10K-4}{K+1}\right)$$

परन्तु दिया है, $Q = (5, 4, -6)$

सापेक्षिक निर्देशांकों की तुलना करने पर,

$$\therefore \qquad \frac{9K+3}{K+1} = 5, \frac{8K+2}{K+1} = 4, \frac{-10K-4}{K+1} = -6$$

$\Rightarrow \qquad 9K + 3 = 5K + 5, 8K + 2 = 4K + 4, -10K - 4 = -6K - 6$

$\Rightarrow \qquad 4K = 2 \Rightarrow K = \dfrac{1}{2}$

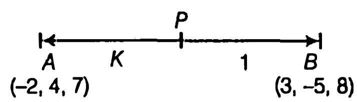
अतः बिंदु Q रेखा PR को अनुपात $1:2$ में अंतःविभाजित करता है।

प्रश्न 3. बिंदुओं $(-2, 4, 7)$ और $(3, -5, 8)$ को मिलाने वाली रेखाखंड, YZ-तल द्वारा जिस अनुपात में विभक्त होता है, उसे ज्ञात कीजिए।

YZ-तल में x-निर्देशांक शून्य होता है। अतः प्रतिच्छेदित् बिंदु के निर्देशांक $(0, y, z)$ होंगे।

हल दिए गए बिंदु $A(-2, 4, 7)$ तथा $B(3, -5, 8)$ हैं

माना बिंदु $P(0, y, z)$, YZ-तल में AB को अनुपात $K:1$ में विभक्त करता है, तब



बिंदु P का x-निर्देशांक $= \dfrac{mx_2 + nx_1}{m+n}$

$$\frac{K \times 3 + 1 \times (-2)}{K+1} = 0 \qquad (\because P \text{ का } x\text{-निर्देशांक शून्य है})$$

$\Rightarrow \qquad 3K - 2 = 0$

$\Rightarrow \qquad K = \dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow \qquad K : 1 = 2 : 3$

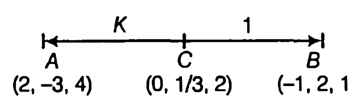
$\therefore$ YZ-तल रेखाखंड को अनुपात $2:3$. में अंतः विभाजित करता है।

प्रश्न 4. विभाजन सूत्र का प्रयोग करके दिखाइए कि बिंदु $A(2, -3, 4)$, $B(-1, 2, 1)$ तथा $C\left(0, \dfrac{1}{3}, 2\right)$ सरेख हैं।

हल माना C, रेखा AB को अनुपात $K:1$ मे विभक्त करता है।

अब C का x-निर्देशांक $= 0$

अर्थात् $\qquad \dfrac{K \times (-1) + 1 \times (2)}{K+1} = 0$



$\Rightarrow \qquad -K + 2 = 0$

$\Rightarrow \qquad K = 2$

$\Rightarrow \qquad K : 1 = 2 : 1$

तथा C का x निर्देशांक $= \dfrac{1}{3}$

$$\Rightarrow \quad \frac{K \times 2 + 1 \times (-3)}{K+1} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2K - 3}{K+1} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad 6K - 9 = K + 1$$

$$\Rightarrow \quad 5K = 10$$

$$\Rightarrow \quad K = 2 \quad \Rightarrow \quad K : 1 = 2 : 1$$

तथा C का z-निर्देशांक $= 2$

$$\Rightarrow \quad \frac{K \times 1 + 1 \times 4}{K+1} = 2$$

$$\Rightarrow \quad K + 4 = 2K + 2$$

$$\Rightarrow \quad K = 2$$

$$\Rightarrow \quad K : 1 = 2 : 1$$

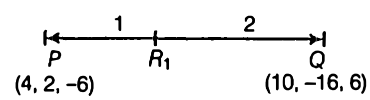
इस प्रकार C, रेखा AB को अनुपात $2:1$ में अंतःविभाजित करता है। अतः बिंदु A, B तथा C संरेखीय हैं।

> **नोट** *कभी-कभी, जब विभिन्न निर्देशांकों में K के मान पृथक रूप से ज्ञात किए जाते हैं, अक्ष समान नहीं होते हैं, तब हम कह सकते हैं कि यह अंतःविभाजित नहीं है।*

प्रश्न 5. **$P(4, 2, -6)$ और $Q(10, -16, 6)$ के मिलाने वाली रेखाखंड PQ को सम त्रिभाजित करने वाले बिंदुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।**

समत्रिभाजित का अर्थ है कि किसी रेखाखंड को तीन समान भागों में विभाजित करना अर्थात् यह विभाजन $1:2$ या $2:1$ होता है।

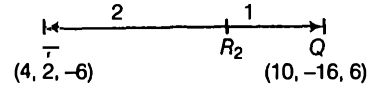
हल माना बिंदु R_1, रेखा PQ को समत्रिभाजित करता है अर्थात् यह रेखा को अनुपात $1:2$ में विभक्त करता है



$$\Rightarrow \quad R_1 = \left(\frac{1 \times 10 + 2 \times 4}{1+2}, \frac{1 \times (-16) + 2 \times 2}{1+2}, \frac{1 \times 6 + 2 \times (-6)}{1+2} \right)$$

$$= \left(\frac{10+8}{3}, \frac{-16+4}{3}, \frac{6-12}{3} \right) = \left(\frac{18}{3}, \frac{12}{3}, \frac{6}{3} \right) = (6, -4, -2)$$

पुनः माना बिंदु R_2, रेखा PQ को अनुपात $2:1$ में समत्रिभाजित करता है,



$$\Rightarrow \qquad R_2 = \left(\frac{2\times 10+1\times 4}{2+1}, \frac{2\times(-16)+1\times 2}{2+1}, \frac{2\times 6+1\times(-6)}{1+2}\right)$$

$$= \left(\frac{20+4}{3}, \frac{-32+2}{3}, \frac{12-6}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{24}{3}, \frac{30}{3}, \frac{6}{3}\right) = (8, -10, 2)$$

अतः अभीष्ट बिंदु (6, – 4, – 2) तथा (8, – 10, 2) हैं।

विविध प्रश्नावली

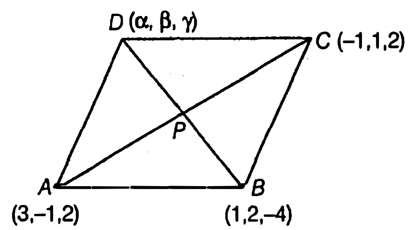
प्रश्न 1. समांतर चतुर्भुज के तीन शीर्ष $A(3, -1, 2)$, $B(1, 2, -4)$ व $C(-1, 1, 2)$ हैं। चौथे शीर्ष D के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हम समांतर चतुर्भुज के गुण, कि समांतर चतुर्भुज के विकार्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं, के प्रयोग के द्वारा इसका चौथा शीर्ष ज्ञात कर सकते हैं।

हल माना $ABCD$ एक समांतर चतुर्भुज है तथा (α, β, γ) बिंदु के निर्देशांक हैं तथा विकर्ण AC तथा BD एक-दूसरे को बिंदु P पर प्रतिच्छेदित करते हैं।

समांतर चतुर्भुज में विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

$\therefore$ BD के मध्य-बिंदु के निर्देशांक = AC के मध्य-बिंदु के निर्देशांक



$$\Rightarrow \qquad \left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+2}{2}, \frac{\gamma-4}{2}\right) = \left(\frac{3-1}{2}, \frac{-1+1}{2}, \frac{2+2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+2}{2}, \frac{\gamma-4}{2}\right) = \left(\frac{2}{2}, 0, \frac{4}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+2}{2}, \frac{\gamma-4}{2}\right) = (1, 0, 2)$$

सापेक्षिक निर्देशांकों की तुलना करने पर हम पाते हैं कि

$$\frac{\alpha+1}{2} = 1, \quad \frac{\beta+2}{2} = 0, \quad \frac{\gamma-4}{2} = 2$$

$$\Rightarrow \qquad \alpha+1 = 2, \quad \beta+2 = 0, \quad \gamma-4 = 4$$

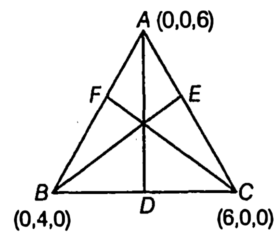
$$\Rightarrow \qquad \alpha = 1, \quad \beta = -2, \quad \gamma = 8$$

$\therefore$ बिंदु D के निर्देशांक (1, – 2, 8) हैं।

प्रश्न 2. एक ΔABC के शीर्षों के निर्देशांक क्रमशः $A(0, 0, 6)$, $B(0, 4, 0)$ तथा $C(6, 0, 0)$ है। त्रिभुज की माध्यिकाओं की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हम माध्यिकाओं की लंबाई त्रिभुज के गुण, कि त्रिभुज की माध्यिका विपरित भुजा को समद्विभाजित करती है, के प्रयोग के द्वारा ज्ञात कर सकते है।

हल शीर्षों $A(0, 0, 6)$, $B(0, 4, 0)$ तथा $C(6, 0, 0)$ के साथ माना ABC एक त्रिभुज है। माना बिंदु D, E तथा F भुजाओं BC, AC तथा AB के क्रमशः मध्य-बिंदु है। अतः AD, BE तथा CF त्रिभुज की माध्यिकाएँ होंगी।



$\Rightarrow$ बिंदु D के निर्देशांक $= \left(\frac{0+6}{2}, \frac{4+0}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (3, 2, 0)$

बिंदु E के निर्देशांक $= \left(\frac{0+6}{2}, \frac{0+0}{2}, \frac{6+0}{2}\right) = (3, 0, 3)$

तथा बिंदु F के निर्देशांक $= \left(\frac{0+0}{2}, \frac{0+4}{2}, \frac{6+0}{2}\right) = (0, 2, 3)$

अब, AD माध्यिका की लंबाई $=$ A तथा D के बीच की दूरी

$$AD = \sqrt{(0-3)^2 + (0-2)^2 + (6-0)^2}$$
$$= \sqrt{9+4+36} = \sqrt{49} = 7$$

इसी प्रकार,
$$BE = \sqrt{(0-3)^2 + (4-0)^2 + (0-3)^2}$$
$$= \sqrt{9+16+9} = \sqrt{34}$$

तथा
$$CF = \sqrt{(6-0)^2 + (0-2)^2 + (0-3)^2}$$
$$= \sqrt{36+4+9} = \sqrt{49} = 7$$

प्रश्न 3. यदि ΔPQR का केंद्रक मूलबिंदु है और शीर्ष $P(2a, 2, 6)$, $Q(-4, 3b, -10)$ और $R(8, 14, 2c)$ है, तो a, b और c मान ज्ञात कीजिए।

हल ΔPQR का केंद्रक $= \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$

अर्थात् $\left(\frac{2a-4+8}{3}, \frac{2+3b+14}{3}, \frac{6-10+2c}{3}\right)$

मूलबिंदु केंद्रक है अर्थात् केंद्रक के निर्देशांक $(0, 0, 0)$ हैं, तब

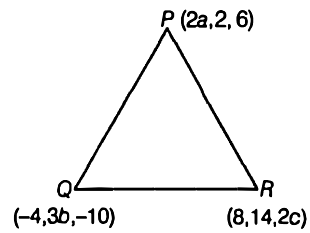
$$\frac{2a-4+8}{3}=0$$

$\Rightarrow$ $2a+4=0 \Rightarrow a=-2$

तथा $$\frac{2+3b+14}{3}=0$$

$\Rightarrow$ $3b+16=0$

$\Rightarrow$ $b=-\frac{16}{3}$



तथा $$\frac{6-10+2c}{3}=0$$

$\Rightarrow$ $2c-4=0$

$\Rightarrow$ $c=2$

$\therefore$ $a=-2, b=\frac{16}{3}, c=2$

प्रश्न 4. y-अक्ष पर उस बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जिसकी बिंदु $P(3,-2,5)$ से दूरी $5\sqrt{2}$ है।

हल माना y-अक्ष पर कोई बिंदु $A(0, y, 0)$ है।

दिया है, P तथा A के बीच की दूरी $PA=5\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ $\sqrt{(3-0)^2+(-2-y)^2+(5-0)^2}=5\sqrt{2}$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$$(3-0)^2+(-2-y)^2+(5-0)^2=50$$

$\Rightarrow$ $9+4+y^2+4y+25=50$

$\Rightarrow$ $y^2+4y+38-50=0$

$\Rightarrow$ $y^2+4y-12=0$

गुणनखंड विधि द्वारा हल करने पर,

$$y^2+6y-2y-12=0$$

$\Rightarrow$ $y(y+6)-2(y+6)=0$

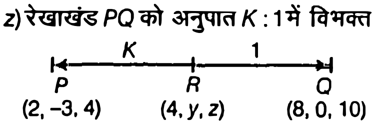
$\Rightarrow$ $(y+6)(y-2)=0$

$\Rightarrow$ $y=-6, 2$

अत: बिंदु $(0,-6,0)$ या $(0,2,0)$ y-अक्ष पर है।

प्रश्न 5. $P(2,-3,4)$ और $Q(8,0,10)$ को मिलाने वाली रेखाखंड पर स्थित एक बिंदु R का x-निर्देशांक 4 है। बिंदु R के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल माना बिंदु $R(x, y, z)$ रेखाखंड PQ को अनुपात $K:1$ में विभक्त करता है।



$$\Rightarrow \quad \frac{K \times 8 + 1 \times 2}{K+1} = 4 \qquad \text{(दिया है)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{8K + 2}{K+1} = 4$$

$$\Rightarrow \quad 8K + 2 = 4K + 4$$

$$\Rightarrow \quad 8K - 4K = 4 - 2$$

$$\Rightarrow \quad 4K = 2 \Rightarrow K:1 = 1:2$$

अतः बिंदु R, रेखाखंड PQ को अनुपात $1:2$ में अंतः विभाजित करता है।

इस प्रकार, R का y-निर्देशांक $= \left(\frac{1 \times 0 + 2 \times (-3)}{1+2}\right) = \left(\frac{-6}{3}\right) = -2$

तथा का z-निर्देशांक $= \left(\frac{1 \times 10 + 2 \times 4}{1+2}\right) = \left(\frac{10+8}{3}\right) = \frac{18}{3} = 6$

अतः बिंदु R के निर्देशांक $(4, -2, 6)$ हैं।

प्रश्न 6. यदि A तथा B बिंदु के निर्देशांक $(3, 4, 5)$ तथा $(-1, 3, -7)$ क्रमशः हैं, तब बिंदु P के समुच्चयों की समीकरणों को इस प्रकार से ज्ञात करो कि

$(PA)^2 + (PB)^2 = K^2$, जहाँ K एक अचर है।

हल माना बिंदु P के निर्देशांक (x, y, z) हैं।

दिया है, $(PA)^2 + (PB)^2 = K^2$

$$\Rightarrow \quad (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 + (x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+7)^2 = K^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + 9 - 6x + y^2 + 16 - 8y + z^2 + 25 - 10z + x^2 + 1 + 2x + y^2 + 9 - 6y + z^2 + 49 + 14z = K^2$$

$$\Rightarrow \quad 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x - 14y + 4z + 109 - K^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2(x^2 + y^2 + z^2) - 4x - 14y + 4z + 109 - K^2 = 0$$

जोकि अभीष्ट समीकरण है।